

# 对流扩散方程的数值流形格式及其稳定性分析

章争荣<sup>1</sup>, 张湘伟<sup>2</sup>

(1. 广东工业大学材料与能源学院, 510006, 广州; 2. 广东工业大学机电工程学院, 510006, 广州)

**摘要:** 将流形方法应用于对流扩散方程的数值求解,建立了基于标准 Galerkin 加权余量法的定常无源对流扩散方程的数值流形格式,采用一维定常无源对流扩散方程证明了物理覆盖的覆盖函数取完全一阶多项式的标准流形格式具有绝对的数值稳定性,并通过与一维对流扩散方程有限元解、精确解的对比,对该数值流形格式的稳定性进行了验证.同时,将基于四节点矩形有限单元覆盖系统的数值流形格式应用于二维平行管道中定常热对流扩散问题的数值分析.结果表明:在小的单元  $Pe$  ( $Pe < 2$ ) 时,流形解的精度较有限元方法显著提高;在较大单元  $Pe$  条件下,一阶多项式覆盖函数的标准流形格式虽然绝对稳定,但假扩散作用显著,得到的数值解与真实结果存在较大的偏差.

**关键词:** 对流扩散;数值流形;数值稳定性

**中图分类号:** O241 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)01-0117-08

## Numerical Manifold Scheme for Convection Diffusion Equation and Its Stability Analysis

ZHANG Zhengrong<sup>1</sup>, ZHANG Xiangwei<sup>2</sup>

(1. Faculty of Materials and Energy, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China; 2. Faculty of Electromechanical Engineering, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** The manifold method was employed to solve convection diffusion problems and the numerical manifold schemes for the convection diffusion equation were derived based on the Galerkin weighted residuals method. The standard manifold schemes with the first order polynomial function for physical cover were proved to be unconditionally stable, and the stability and adaptability of the present manifold schemes were confirmed by comparative analysis of numerical manifold solutions, finite element solutions and analytic solutions for one-dimensional steady source-free convection diffusion. The manifold schemes based on a four-node rectangular finite element cover system were used to simulate two-dimensional thermal convection-diffusion in pipe entry flow. The results show that the numerical manifold method can significantly improve computational accuracy at low element Peclet number ( $Pe < 2$ ) compared with the finite element method. However, severe false diffusion effects at high element Peclet number will reduce computational accuracy and lead to erroneous results.

**Keywords:** convection diffusion equation; numerical manifold method; numerical stability

对流扩散问题是流体力学、环境、化工等许多工程领域中经常遇到的典型问题.一般情况下,描述问题的对流扩散方程难以求得精确解,因此研究该类方程的有效数值求解方法已成为计算力学领域中的

重要课题之一<sup>[1-2]</sup>.国内外学者已将有限差分法(FDM)、有限体积法(FVM)、有限元法(FEM)等典型的数值方法应用于该类方程的数值求解并进行了深入研究.一般差分格式在应用于对流扩散方程求

解时,由于对流项的存在,会出现数值振荡,导致数值不稳定性,因此逐步发展了求解对流扩散方程的迎风差分格式及迎风紧致差分格式等数值格式,但仍然存在差分方法固有的物理量守恒性和对复杂流场结构的适应性等问题<sup>[3-4]</sup>. 在对流扩散方程的FVM中,为了解决数值振荡问题,对流项仍然采用了迎风差分格式等离散方式,而FVM也存在复杂流场结构的离散、自由边界面的处理等固有问题<sup>[5-6]</sup>. 在对流扩散方程的FEM中,当对流项占优时,采用传统的加权余量FEM求解常出现数值失真振荡<sup>[7-8]</sup>,因此相继提出了诸多非标准的FEM来克服数值振荡,如流线迎风有限元、最小二乘有限元等方法<sup>[9-10]</sup>,其共同特点是在标准加权余量有限元公式中引入“人工”耗散项来消除数值振荡,但FEM对于存在大运动、大梯度和各类间断等情况,将产生网格畸变和要求网格重新划分等问题<sup>[11]</sup>. 尽管对这些方法已进行了大量的改进和完善,以适用对流扩散问题的特殊性<sup>[12]</sup>,但由于这些方法存在各自固有的特点,在工程实际应用中,仍然存在稳定性、计算精度和计算效率等问题<sup>[13]</sup>.

基于有限覆盖技术的数值流形方法(NMM)是20世纪90年代初由石根华博士创建的<sup>[14-15]</sup>,又称为有限覆盖方法(FCM),是一种新的广义的数值方法. 该方法具有两套分开且相互独立的覆盖网格:数学覆盖(网格)和物理覆盖(网格). 数学覆盖定义近似解的精度,物理网格决定问题求解域. 两套覆盖网格组成流形方法求解所需的有限覆盖系统. 有限覆盖系统上的每一个物理覆盖可以定义各自独立的覆盖函数,流形单元(即覆盖的公共区域)上的总体覆盖函数由各覆盖的覆盖函数加权求和获得. 由于数值流形方法通过有限覆盖技术将FEM和解析法等计算形式统一,因此能够为各种物理问题中偏微分方程的数值求解创造出效率更高的计算方法<sup>[16-17]</sup>,目前已在裂纹尖端场的数值模拟、岩石的冲击损伤演化模拟、势流问题、耦合振动等领域得到成功应用<sup>[18-22]</sup>,但还未在对流扩散问题领域得到应用. 本文根据数值流形方法的特点,将该方法应用于二维对流扩散方程的数值求解,推导出相关流形格式,并研究流形格式的稳定性以及存在的问题.

## 1 对流扩散方程

假定 $\phi$ 是流体单位体积所携带的物理量. 物理量在流场中的变化规律可以采用对流扩散方程进行描述,即

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u_j \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) + S \quad (1)$$

式中: $u_j$ 表示流场速度; $k_{ij}$ 表示扩散系数; $S$ 为物理量的源. 式(1)左边第1项为瞬态项,第2项为对流项;右边第1项为扩散项,第2项为广义源项.

对于二维流场中的定常无源对流扩散问题,根据Galerkin加权余量法,并运用分步积分法和Green公式可得式(1)的数值求解弱解积分式为

$$\int_{\Omega} \left\{ \left( u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \delta \phi + k \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \phi)}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial (\delta \phi)}{\partial y} \right] \right\} d\Omega = \oint_{\Gamma} k \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta \phi d\Gamma \quad (2)$$

式中: $\delta \phi$ 为权函数.

## 2 对流扩散方程的数值流形格式

### 2.1 单元覆盖函数

如建立有限覆盖系统对对流扩散方程进行数值流形分析,可假定任意流形单元 $e$ 中共有 $n$ 个物理覆盖,单元的各物理覆盖 $U_i$ 上的覆盖函数 $\phi_i(x, y)$ 取为多项式形式,采用级数形式表达为

$$\phi_i(x, y) = [f] \cdot \{D_i\} \quad (3)$$

式中: $[f]$ 为基本级数; $\{D_i\} = (d_{i,1} \ d_{i,2} \ \cdots \ d_{i,m})^T$ 为物理覆盖 $U_i$ 上的覆盖自由度,其个数 $m$ 取决于基本级数的项数.

如各覆盖上的覆盖权函数分别取为 $N_i (i=1, 2, \cdots, n)$ ,且满足单位分解要求即 $\sum_{i=1}^n N_i(x, y) = 1$  ( $x, y \in e$ ),则单元上的总体覆盖函数可由各覆盖的覆盖函数加权求和得到,即

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \phi_i(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) [f] \{D_i\} = [T] \{D^e\} \quad (4)$$

式中:单元自由度矢量 $\{D^e\} = (D_1^T \ D_2^T \ \cdots \ D_n^T)^T$ ;单元矩阵 $[T] = [T_1 \ T_2 \ \cdots \ T_n]$

$$\begin{aligned} [T_i] &= N_i(x, y) [f] = \\ [N_i f_{i1} \ N_i f_{i2} \ \cdots \ N_i f_{im}] &= \\ [T_{i1} \ T_{i2} \ \cdots \ T_{im}] \\ [T_{ij}] &= N_i(x, y) f_{ij}(x, y) \\ i &= 1, 2, \cdots, n \quad j = 1, 2, \cdots, m \end{aligned}$$

根据式(4),还可求得总体覆盖函数 $\phi(x, y)$ 对坐标的偏导数为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial [T]}{\partial x} \{D^e\} = [B_x] \{D^e\} \\ \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y} &= \frac{\partial [T]}{\partial y} \{D^e\} = [B_y] \{D^e\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中:  $[B_x]=\frac{\partial [T]}{\partial x}; [B_y]=\frac{\partial [T]}{\partial y}$ .

2.2 二维对流扩散方程的数值流形格式

对有限单元覆盖系统中的任意流形单元  $e$ , 如式(2)中的权函数  $\delta\phi$  取为单元覆盖的基函数, 即

$$\delta\phi = [T] \quad (6)$$

将式(4)~(6)代入对流扩散方程的 Galerkin 积分式(2), 并结合自然边界条件, 可得

$$\int_{\Omega} (u[T]^T[B_x] + v[T]^T[B_y] + k[B_x]^T[B_x] + k[B_y]^T[B_y]) \{D^e\} d\Omega = \oint_{\Gamma} c [T]^T d\Gamma$$

整理后, 简化表示为

$$[A^e] \{D^e\} = \{F^e\} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} [A^e] &= \int_{\Omega} (u[T]^T[B_x] + v[T]^T[B_y] + k[B_x]^T[B_x] + k[B_y]^T[B_y]) d\Omega \\ \{F^e\} &= \oint_{\Gamma} c [T]^T d\Gamma \end{aligned}$$

式中:  $c$  为单元边界向外的扩散速率

$$c = k_n \frac{\partial \phi}{\partial n} = k \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + k \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y$$

$n_x, n_y$  为边界外法线的方向余弦. 式(7)即为单元流形方程.

若整个求解域划分为  $M$  个流形单元, 则对单元流形方程进行集成可得总体流形方程为

$$[A] \{D\} = \{F\} \quad (8)$$

式中:  $[A] = \sum_{i=1}^M [A^e]$  为总体对流扩散矩阵;  $\{D\} = \sum_{i=1}^M \{D^e\}$  为总体覆盖自由度列阵;  $\{F\} = \sum_{i=1}^M \{F^e\}$  为广义载荷列阵. 将本质边界条件引入到式(8), 即可求解获得整个流场中各物理覆盖的自由度, 进而可求得求解域内物理场量的数值解.

3 对流扩散方程数值流形格式的稳定性分析

采用数值流形方法求解对流扩散方程时, 可通过提高有限单元覆盖系统中物理覆盖的覆盖函数阶次来提高计算精度, 同时能有效解决有限元方法中

存在的数值振荡问题. 现取最简单的一维定常无源对流扩散方程进行分析.

一维定常无源对流扩散方程为

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} - k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (9)$$

式中速度  $u > 0$  为已知, 且设方程满足齐次自然边界条件

$$k \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$$

式(9)数值求解的 Galerkin 积分式为

$$\int_{\Omega} \left( u(\delta\phi) \frac{\partial \phi}{\partial x} + k \frac{\partial(\delta\phi)}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) d\Omega = 0 \quad (10)$$

数值流形方法求解时, 如将求解域均匀划分为  $M$  个流形单元, 任意一单元  $e_i$  均由 2 个物理覆盖组成, 分别为  $U_i$  和  $U_{i+1}$ , 并设 2 个覆盖的中心点(即节点)坐标分别为  $x_i, x_{i+1}$ , 单元长度为  $h$ . 当组成单元的物理覆盖的覆盖函数取为常数覆盖时, 将等同于 FEM 分析, 对流占优时可能产生数值振荡. 因此, 根据流形方法有限覆盖的特点, 应提高覆盖函数的阶次. 如采用完全 2 阶或以上的多项式函数, 尽管提高了单元内覆盖函数的阶次, 可以提高精度, 但流形格式和计算过程将非常复杂繁琐, 不便于分析计算, 故在此只取完全一阶多项式的覆盖函数进行稳定性分析. 于是, 单元物理覆盖的覆盖函数  $\phi_i(x), \phi_{i+1}(x)$  可分别取为

$$\phi_i(x) = [f_i] \cdot \{D_i\}; \phi_{i+1}(x) = [f_{i+1}] \cdot \{D_{i+1}\} \quad (11)$$

如覆盖函数取为局部化的多项式函数形式, 则式(11)中的基本级数可选为

$$[f_i] = [1 \quad x - x_i]; [f_{i+1}] = [1 \quad x - x_{i+1}] \quad (12)$$

而覆盖自由度则为  $\{D_i\} = (d_{i,1} \quad d_{i,2})^T, \{D_{i+1}\} = (d_{i+1,1} \quad d_{i+1,2})^T$ .

如覆盖权函数采用线性形式, 则

$$\left. \begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2(x - x_0)}{h} \right) \\ N_{i+1} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2(x - x_0)}{h} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中:  $x_0 = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ . 由式(11)和(13), 可得单元总体覆盖函数为

$$\begin{aligned} \phi(x) &= N_i \phi_i + N_{i+1} \phi_{i+1} = [N_i \quad N_{i+1}] \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{Bmatrix} = \\ &= [N_i \quad N_{i+1}] \begin{bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} = \end{aligned}$$

$$[T_i \quad T_{i+1}] \begin{Bmatrix} D_i \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} = [T] \{D^e\} \quad (14)$$

式中  $[T_i] = [N_i f_i] = [N_i \quad N_i(x-x_i)]$

$$[T_{i+1}] = [N_{i+1} f_{i+1}] = [N_{i+1} \quad N_{i+1}(x-x_{i+1})]$$

$$[T] = [N_i \quad N_i(x-x_i) \quad N_{i+1} \quad N_{i+1}(x-x_{i+1})]$$

$$\{D^e\} = \begin{Bmatrix} D_i \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} = (d_{i,1} \quad d_{i,2} \quad d_{i+1,1} \quad d_{i+1,2})^T$$

取单元 Galerkin 积分式(10)中的权函数为单元的基函数,即  $\delta\phi = T$ ,于是得

$$\int_{\Omega} \left( u \begin{Bmatrix} T_i \\ T_{i+1} \end{Bmatrix} \frac{\partial(T_i \quad T_{i+1})}{\partial x} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} + k \frac{\partial}{\partial x} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_{i+1} \end{Bmatrix} \frac{\partial(T_i \quad T_{i+1})}{\partial x} \begin{Bmatrix} D_i \\ D_{i+1} \end{Bmatrix} \right) dx = 0 \quad (15)$$

将基本级数式和权函数式代入式(15),展开后得到单元流形方程为

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma}{2} & \frac{1}{6}\gamma h & -1 + \frac{\gamma}{2} & -\frac{1}{6}\gamma h \\ -\frac{1}{6}\gamma h & \frac{1}{3}h^2 & \frac{1}{6}\gamma h & -\frac{1}{3}h^2 \\ -1 - \frac{\gamma}{2} & -\frac{1}{6}\gamma h & 1 + \frac{\gamma}{2} & \frac{1}{6}\gamma h \\ \frac{1}{6}\gamma h & -\frac{1}{3}h^2 & -\frac{1}{6}\gamma h & \frac{1}{3}h^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \\ d_{i+1,1} \\ d_{i+1,2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (16)$$

式中:  $\gamma = uh/k$ .

按照单元节点编号进行集成后,得到总体流形方程,其中关于  $i$  节点的方程是

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma}{2} & \frac{1}{6}\gamma h \\ -\frac{1}{6}\gamma h & \frac{1}{3}h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i-1,1} \\ d_{i-1,2} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3}\gamma h \\ -\frac{1}{3}\gamma h & \frac{2}{3}h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma}{2} & \frac{1}{6}\gamma h \\ -\frac{1}{6}\gamma h & \frac{1}{3}h^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i+1,1} \\ d_{i+1,2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (17)$$

该方程是按中心差分格式离散的有限差分方程,其精确解为<sup>[23]</sup>

$$\{D_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{Bmatrix} + \left[ \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma}{2} & \frac{1}{6}\gamma h \\ -\frac{1}{6}\gamma h & \frac{1}{3}h^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma}{2} & \frac{1}{6}\gamma h \\ -\frac{1}{6}\gamma h & \frac{1}{3}h^2 \end{bmatrix} \right]^i \begin{Bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{Bmatrix} \quad (18a)$$

简化表达为

$$\{D_i\} = \{C_1\} + ([A_1]^{-1}[A_2])^i \{C_2\} \quad (18b)$$

式中:  $\{C_1\} = \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{Bmatrix}$ ,  $\{C_2\} = \begin{Bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{Bmatrix}$  为解系数,根据边界条件确定;系数矩阵

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\gamma}{2} & \frac{1}{6}\gamma h \\ -\frac{1}{6}\gamma h & \frac{1}{3}h^2 \end{bmatrix} \quad [A_2] = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\gamma}{2} & \frac{1}{6}\gamma h \\ -\frac{1}{6}\gamma h & \frac{1}{3}h^2 \end{bmatrix}$$

将式(18)整理后得

$$\{D_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3 + (\gamma + 3)^2}{3 + (\gamma - 3)^2} & 0 \\ \frac{6\gamma^2}{h(3 + (\gamma - 3)^2)} & 1 \end{bmatrix}^i \begin{Bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{Bmatrix} \quad (19a)$$

可进一步简化为

$$\{D_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \left( \frac{3 + (\gamma + 3)^2}{3 + (\gamma - 3)^2} \right)^i & 0 \\ \frac{\gamma}{2h} \left( \frac{3 + (\gamma + 3)^2}{3 + (\gamma - 3)^2} \right)^i - \frac{\gamma}{2h} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{Bmatrix} \quad (19b)$$

取  $\varphi = \left( \frac{3 + (\gamma + 3)^2}{3 + (\gamma - 3)^2} \right) > 1$ , 于是

$$\{D_i\} = \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \varphi^i & 0 \\ \frac{\gamma}{2h}(\varphi^i - 1) & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{21} \\ c_{22} \end{Bmatrix} \quad (19c)$$

根据式(11)可得任意  $i$  节点的覆盖函数为

$$\phi_i(x) = [f_i] \{D_i\} = [1 \quad x - x_i] \begin{Bmatrix} d_{i,1} \\ d_{i,2} \end{Bmatrix} =$$

$$c_{11} + c_{21}\varphi^i + (x - x_i) \left[ c_{12} + \frac{\gamma}{2h}(\varphi^i - 1)c_{21} + c_{22} \right]$$

于是,任意  $i$  节点处的函数值为

$$\phi_i = c_{11} + c_{21}\varphi^i$$

因  $\varphi > 1$ , 所以数值解将不会产生振荡,且不论单元的大小,都能得到稳定的解,因此对流扩散方程的一阶覆盖函数的流形格式是无条件稳定的。

以上分析证明了采用一阶覆盖函数的一维定常无源对流扩散方程流形格式具有绝对的稳定性。一维定常无源对流扩散方程是最简单的模型,尽管实际工程的对流扩散问题极为复杂,但文献[24]研究表明一维模型几乎是最苛刻的分析模型,多维复杂条件下对流扩散方程数值格式的稳定性条件将更为

宽松,因此采用一阶覆盖函数绝对稳定的对流扩散方程流形格式可以推广应用到多维复杂的情况.

## 4 对流扩散方程数值流形方法的应用和存在的问题

### 4.1 一维对流扩散方程的数值流形分析

一维定常无源对流扩散方程式(9)的精确解为

$$\phi \frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{\exp(ux/k) - 1}{\exp(uL/k) - 1} = \frac{\exp(Pex/L) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (20)$$

式中: $\phi_0$  和  $\phi_L$  分别为入口和出口本质边界条件; $L$  为求解域长度. 如设  $\phi_0=0$ 、 $\phi_L=1$ 、 $L=1$ 、 $u=1$ ,则式(20)可简化为

$$\phi = \frac{\exp(Pex) - 1}{\exp(Pe) - 1} \quad (21)$$

现采用流形方法和有限元方法进行数值计算,并与精确解进行对比分析. 数值计算时,整个求解域划分成 20 个单元,单元长度为 0.05;流形方法的有限单元覆盖系统中,各覆盖的覆盖函数采用局部化的多项式函数形式,其基本级数为式(12)形式,其他与有限元法相同.

当取 5、10、20、30 等小的  $Pe$  计算时,此时单元局部  $Pe$  分别为 0.25、0.5、1.0、1.5,求得流场不同位置的精确解和数值解如表 1 所示. 当单元  $Pe$  为 0.25 时,流形方法的数值解几乎和精确解完全相同,而有限元解则存在一定误差,误差大小由入口处到出口处递减,在  $x=0.2$  处达 2%. 随着单元  $Pe$  的增加,流形解也会出现误差,误差大小同样由入口处到出口处递减,并随  $Pe$  的增大而增大,当单元  $Pe$  为 0.5、1.0、1.5 时,在  $x=0.2$  处误差分别为

表 1 单元  $Pe<2$  时的精确解以及数值流形和有限元法的数值解

| $Pe$ | 单元 $Pe$ | 解形式  | $x=0$                   | $x=0.2$                 | $x=0.4$                 | $x=0.6$                | $x=0.8$                | $x=1.0$ |
|------|---------|------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|------------------------|------------------------|---------|
| 5    | 0.25    | 真实解  | 0                       | $1.166 \times 10^{-2}$  | $4.334 \times 10^{-2}$  | $1.295 \times 10^{-1}$ | $3.636 \times 10^{-1}$ | 1       |
|      |         | 流形解  | $6.784 \times 10^{-13}$ | $1.166 \times 10^{-2}$  | $4.334 \times 10^{-2}$  | $1.295 \times 10^{-1}$ | $3.636 \times 10^{-1}$ | 1       |
|      |         | 有限元解 | $6.606 \times 10^{-13}$ | $1.145 \times 10^{-2}$  | $4.273 \times 10^{-2}$  | $1.282 \times 10^{-1}$ | $3.618 \times 10^{-1}$ | 1       |
| 10   | 0.5     | 真实解  | 0                       | $2.901 \times 10^{-4}$  | $2.433 \times 10^{-3}$  | $1.827 \times 10^{-2}$ | $1.353 \times 10^{-1}$ | 1       |
|      |         | 流形解  | $4.544 \times 10^{-15}$ | $2.903 \times 10^{-4}$  | $2.435 \times 10^{-3}$  | $1.828 \times 10^{-2}$ | $1.353 \times 10^{-1}$ | 1       |
|      |         | 有限元解 | $3.656 \times 10^{-15}$ | $2.456 \times 10^{-4}$  | $2.140 \times 10^{-3}$  | $1.676 \times 10^{-2}$ | $1.296 \times 10^{-1}$ | 1       |
| 20   | 1.0     | 真实解  | 0                       | $1.105 \times 10^{-7}$  | $6.142 \times 10^{-6}$  | $3.355 \times 10^{-4}$ | $1.832 \times 10^{-2}$ | 1       |
|      |         | 流形解  | $2.123 \times 10^{-19}$ | $1.131 \times 10^{-7}$  | $6.252 \times 10^{-6}$  | $3.394 \times 10^{-4}$ | $1.842 \times 10^{-2}$ | 1       |
|      |         | 有限元解 | $2.868 \times 10^{-20}$ | $2.294 \times 10^{-8}$  | $1.881 \times 10^{-6}$  | $1.524 \times 10^{-4}$ | $1.235 \times 10^{-2}$ | 1       |
| 30   | 1.5     | 真实解  | 0                       | $3.766 \times 10^{-11}$ | $1.523 \times 10^{-8}$  | $6.144 \times 10^{-6}$ | $2.479 \times 10^{-3}$ | 1       |
|      |         | 流形解  | $1.187 \times 10^{-23}$ | $4.555 \times 10^{-11}$ | $1.756 \times 10^{-8}$  | $6.756 \times 10^{-6}$ | $2.600 \times 10^{-3}$ | 1       |
|      |         | 有限元解 | $1.253 \times 10^{-27}$ | $3.008 \times 10^{-14}$ | $7.225 \times 10^{-11}$ | $1.735 \times 10^{-7}$ | $4.165 \times 10^{-4}$ | 1       |

0.069%、2.35%、21%,而有限元解的误差将随  $Pe$  的增大而显著增大,在单元  $Pe$  大于 1.0 时,数值解与精确解不处于同一数量级.

当取  $Pe$  为 150 时,此时单元  $Pe$  为 7.5,精确解、有限元解和流形解随  $x$  坐标的分布规律如图 1 所示. 与精确解相比,有限元解产生了明显的数值振荡,而流形解出现假扩散,数值较精确解偏大,导致了不合理的数值结果.

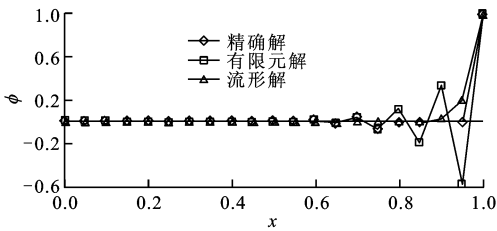


图 1  $Pe=150$  时的精确解、有限元和流形解的分布规律

### 4.2 二维对流扩散方程的数值流形分析

将数值流形方法应用于图 2 所示的典型二维平行管道中的定常热对流扩散问题分析,数学网格采用标准的矩形网格,流形单元数量采用  $6 \times 10$  和  $6 \times 15$  两种形式,分析中分别取  $Pe=75,100,150,200$ ,并与同样网格的有限元法分析进行对比. 有限元方法采用 4 节点线性单元,流形方法采用 4 节点矩形单元,各节点的物理覆盖函数采用局部化的一阶多项式形式,即式(3)中任意  $U_i$  覆盖上温度基函数取为  $[f_i] = [1 \ x-x_i \ y-y_i](x_i, y_i$  为覆盖中心点坐标),覆盖权函数采用有限元分析时矩形单元的形状函数,即

$$N_1(x,y) = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right) \left(1 - \frac{y-y_0}{b}\right)$$

$$N_2(x,y) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x-x_0}{a}\right)\left(1 - \frac{y-y_0}{b}\right)$$
$$N_3(x,y) = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x-x_0}{a}\right)\left(1 + \frac{y-y_0}{b}\right)$$
$$N_4(x,y) = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x-x_0}{a}\right)\left(1 + \frac{y-y_0}{b}\right)$$

式中:  $(x_0, y_0)$  为单元中心坐标.

图 3 是  $6\times 10$  的流形单元网格图和流形方法计算的速度场分布图. 图 4a~d 分别是  $Pe=150$  时流场温度分布图、流场水平中心线上的温度分布图, 以及  $x=1.8$  和  $4.2$  时  $y$  方向垂直线上的温度分布图.

由图 4b~d 可以看出: 当  $Pe=75\sim 200$  时, 采用常规加权余量有限元计算时, 都无一例外地产生了数值振荡, 而且振荡幅度均随  $Pe$  的增大而增大; 当  $Pe=150, 200$  时, 水平中心线上温度将远远大于 1, 与文献[7-8]的结果相似. 若采用流形方法计算, 在不同的  $Pe$  时都没有产生数值振荡.

当加密网格后, 采用  $6\times 15$  单元网格和对应速度场计算, 常规有限元的计算结果同样产生了数值振荡, 其振荡规律与采用  $6\times 10$  单元计算时类似, 而流形方法都得到了稳定的计算结果. 尽管流形方法得到了稳定的数值解, 但与真实解存在着很大的误差. 图 5 是采用  $6\times 15$  的单元网格、 $Pe=150$  和迎风

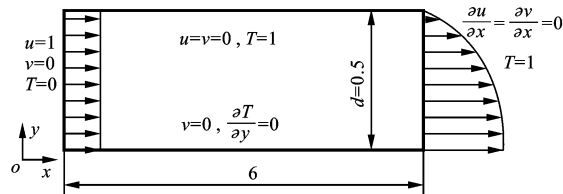
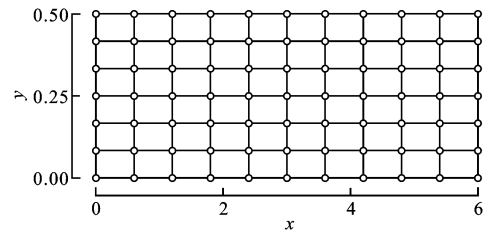
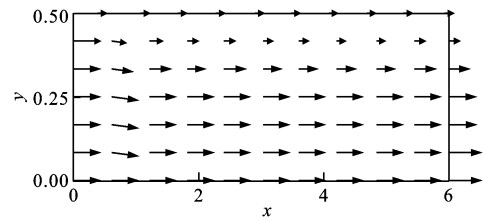


图 2 二维平行管道中的定常热对流扩散问题

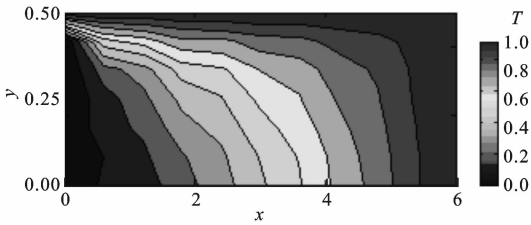


(a) 流形单元网格图

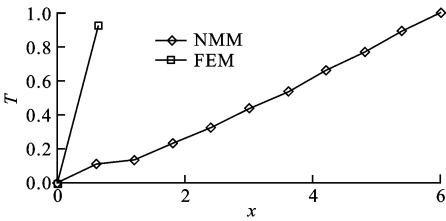


(b) 速度场分布图

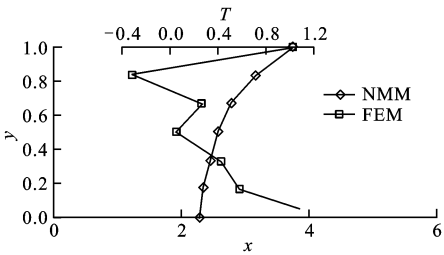
图 3  $6\times 10$  流形单元网格图和速度场分布图



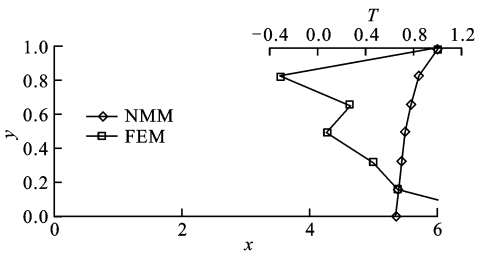
(a) 温度等值线分布



(b) 流场水平中心线上的温度分布

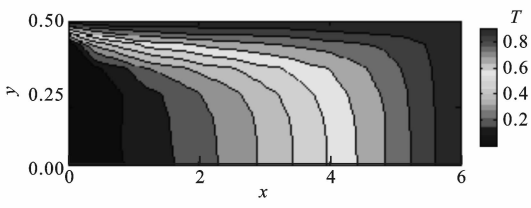


(c)  $x=1.8$  时  $y$  方向垂直线上的温度分布

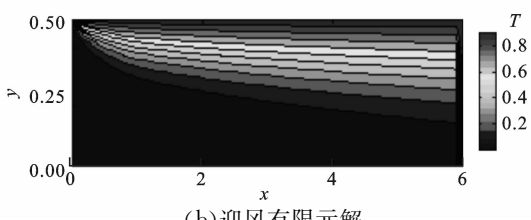


(d)  $x=4.2$  时  $y$  方向垂直线上的温度分布

图 4  $6\times 10$  单元、 $Pe=150$  时流场的温度分布规律



(a) 数值流形解



(b) 迎风有限元解

图 5  $6\times 15$  单元、 $Pe=150$  时数值流形解和迎风有限元温度分布

因子为1时,迎风有限元的数值解与数值流形解的对比,温度分布表明扩散的效应显著增大。

通过一维定常无源对流扩散问题和二维平行管道中定常热对流扩散问题的实例计算,验证了对流扩散方程采用一阶覆盖函数的数值流形格式是无条件稳定的,在不同  $Pe$  时都获得了稳定的数值解。在小的  $Pe(Pe < 2)$  和单元  $Pe$  时,扩散作用显著增加,提高覆盖函数的阶次将有利于提高解的精度,数值解精度较有限元方法显著提高。在较大的  $Pe$  和单元  $Pe$  时,对流作用较扩散作用显著得多,流形方法虽然不会像有限元法一样产生数值振荡,但得到的数值解实际上只是在物理上看起来合理的解,而与真实解存在较大的偏差。其主要原因是通过对流扩散方程的 Galerkin 加权余量积分式(2)中对流项的离散没有考虑质点流动方向上下游对物理量的不同影响,从而相对增大了扩散的作用;其次是在式(1)的对流项和扩散项中,物理量对坐标具有不同阶次的偏导数,而计算中采用同样的离散方式,也将增大计算误差。

## 5 结 论

将流形方法应用于对流扩散方程的数值求解,建立了标准 Galerkin 加权余量形式的对流扩散方程的数值流形格式,证明对流项和扩散项覆盖函数全部采用一阶多项式函数的标准流形格式具有绝对的数值稳定性,并采用流形方法对一维定常无源对流扩散问题和二维平行管道中定常热对流扩散问题进行了数值分析。数值实验表明:在小的  $Pe$  和单元  $Pe$  时,流形解的精度较有限元方法显著提高;在较大单元  $Pe$  时,一阶覆盖函数标准流形格式的结果虽然稳定,但假扩散作用显著,得到的数值解与精确结果存在较大的偏差,其主要原因是标准格式没有考虑对流项中质点流动方向上下游对物理量的不同影响,从而相对增大了扩散的作用,因此解决假扩散问题是流形方法在对流扩散方程中应用的关键。

## 参考文献:

- [1] PLETCHER R. Computational fluid mechanics and heat transfer[M]. 2nd ed. London, UK: Taylor & Francis, 1997.
- [2] 陶文铨. 数值传热学[M]. 2版. 西安:西安交通大学出版社, 2001.
- [3] TORSTEN L. An upwind difference scheme on a novel Shishkin-type mesh for a linear convection-diffusion problem [J]. J Comput Appl Math, 1999, 110

(1): 93-104.

- [4] WANG X, YANG Z F, HUANG G H. High-order compact difference scheme for convection diffusion problems on nonuniform grids[J]. J Eng Mech, 2005, 131(12): 1221-1228.
- [5] CHOU S H, KWAK D Y, VASSILEVSKI P S. Mixed upwinding covolume methods on rectangular grids for convection-diffusion problems[J]. Siam J Sci Comput, 1999, 21(1): 145-165.
- [6] 高智, 柏威. 对流扩散方程的摄动有限体积(PFV)方法及讨论[J]. 力学学报, 2004, 36(1): 88-93.  
GAO Zhi, BAI Wei. Perturbational finite volume method for convective diffusion equation and discussion[J]. ACTA Mechanica Sinica, 2004, 36(1): 88-93.
- [7] ZIENKIEWICZ O C, HEINRICH J C. The finite element method and convection problems in fluid mechanics[M]. New York, USA: John Wiley & Sons Inc., 1978: 1-22.
- [8] HEINRICH J C, HUYAKORN P S, ZIENKIEWICZ O C, et al. An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equations[J]. Int J Numer Methods Eng, 1977, 11(1): 131-143.
- [9] ALESSANDRO C, FRANCO R, ANDREA S. Quadratic Petrov-Galerkin finite elements for advective-reactive features in turbomachinery CFD[J]. Int J Numer Methods Heat Fluid Flow, 2005, 15(8): 894-925.
- [10] FRANCA L P, GUILLERMO H, ARIF M. Revisiting stabilized finite element methods for the advective-diffusive equation[J]. Comput Meth Appl Mech Eng, 2006, 195 (13/16): 1560-1572.
- [11] SASHIKUMAAR G, LUTZ T. An accurate finite element scheme with moving meshes for computing 3D-axisymmetric interface flows[J]. Int J Numer Methods Fluids, 2008, 57 (2): 119-138.
- [12] TIDRIRI M D. Analysis of the hybrid finite element/finite volume methods for linear hyperbolic and convection-dominated convection-diffusion problems[J]. J Comput Appl Math, 2002, 139 (2): 323-350.
- [13] KIRK B S, CAREY G F. Development and validation of a SUPG finite element scheme for the compressible Navier-Stokes equations using a modified inviscid flux discretization[J]. Int J Numer Methods Fluids, 2008, 57 (3): 265-293.
- [14] SHI Genhua. Manifold method[C]//Proc of the First Int Forum on Discon Deform Anal & Simu of Discon Media, Berkeley, California, USA: TSI Press, 1996: 52-204.

- [15] SHI Genhua. Manifold method of material analysis [C]//Transactions of the Ninth Army Conference on Applied Mathematics and Computing. Minneapolis, Minnesota, USA: The Army Mathematics Steering Committee, 1992: 51-76.
- [16] TERADA K, KURUMATANI M. Performance assessment of generalized elements in the finite cover method[J]. Finite Elem Anal Des, 2004, 41(2): 111-132.
- [17] TERADA K, KURUMATANI M. An integrated procedure for three-dimensional structural analysis with the finite cover method[J]. Int J Numer Methods Eng, 2005, 63(15): 2102-2123.
- [18] TERADA K, ISHII T, KYOYA T, et al. Finite cover method for progressive failure with cohesive zone fracture in heterogeneous solids and structures[J]. Comput Mech, 2007, 39(2): 191-210.
- [19] 苏海东, 黄玉盈. 数值流形方法在流固耦合谐振分析中的应用[J]. 计算力学学报, 2007, 24(6): 823-828.  
SU Haidong, HUANG Yuying. Application of numerical manifold method in fluid-solid interaction harmonic analysis[J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(6): 823-828.
- [20] 骆少明, 姜东茹, 蔡永昌, 等. 金属成形过程的数值流形模拟方法研究[J]. 机械工程学报, 2002, 38(8): 105-109.  
LUO Shaoming, JIANG Dongru, CAI Yongchang, et al. Study on the numerical manifold method simulation for metal forming process[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2002, 38(8): 105-109.
- [21] 栾茂田, 杨新辉, 田荣, 等. 有限覆盖无单元法在多裂纹岩体断裂特性数值分析中的应用[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(24): 4403-4408.  
LUAN Maotian, YANG Xinhui, TIAN Rong, et al. Extension of finite-cover-based element-free method to fracture analyses of rock mass with multiple cracks [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(24): 4403-4408.
- [22] 魏高峰, 冯伟. 热传导问题的非协调数值流形方法[J]. 力学季刊, 2005, 26(3): 452-455.  
WEI Gaofeng, FENG Wei. Incompatible numerical manifold method based on heat exchange problem[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2005, 26(3): 452-455.
- [23] ISAACSON E, KELLER H B. Analysis of numerical methods [M]. New York, USA: Dover Publications, 1994.
- [24] 刘星, 王秋旺, 陶文铨. 边界条件对对流扩散和方程数值稳定性的影响[J]. 工程热物理学报, 2001, 22(6): 729-731.  
LIU Xing, WANG Qiuwang, TAO Wenquan. Discussion on the convective numerical stability of convection-diffusion equation-the effect of the boundary conditions [J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2001, 22(6): 729-731.

(编辑 荆树蓉)